به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۳: درون یابی

بخش ۱: روش لاگرانژی

تعریف درون یابی:

فرض کنید مقدار تابع f مطابق جدول زیر برای نقاط x_0 تا x_n معلوم باشد:

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i) = f_i$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

یکی از ساده ترین کارها برای درون یابی پیدا کردن یک چندجمله ای با نام P(x) است که دارای شرط زیر باشد:

$$i = 0,1,2,\ldots,n \quad \rightarrow \quad P(x_i) = f_i$$

سوال : این چند جمله ای درجه چند است؟

چند جمله ای های لاگرانژ:

در رابطه زیر فرض می کنیم L_0، L_1 و .... چند جمله ای هایی درجه n باشند که به آن ها چندجمله ای های لاگرانژ گفته می شود:

x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...

$$\boxed{P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n}$$

که در آن برای $j = 0, 1, \cdots, n$ داریم :

$$\boxed{L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (3)}$$

از (۳) داریم :

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 \ , \ i \neq j \\ 1 \ , \ i = j \end{cases}$$

مثال ۱. چند جمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است، به دست آورید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

پاسخ:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -(x^2-1)$$

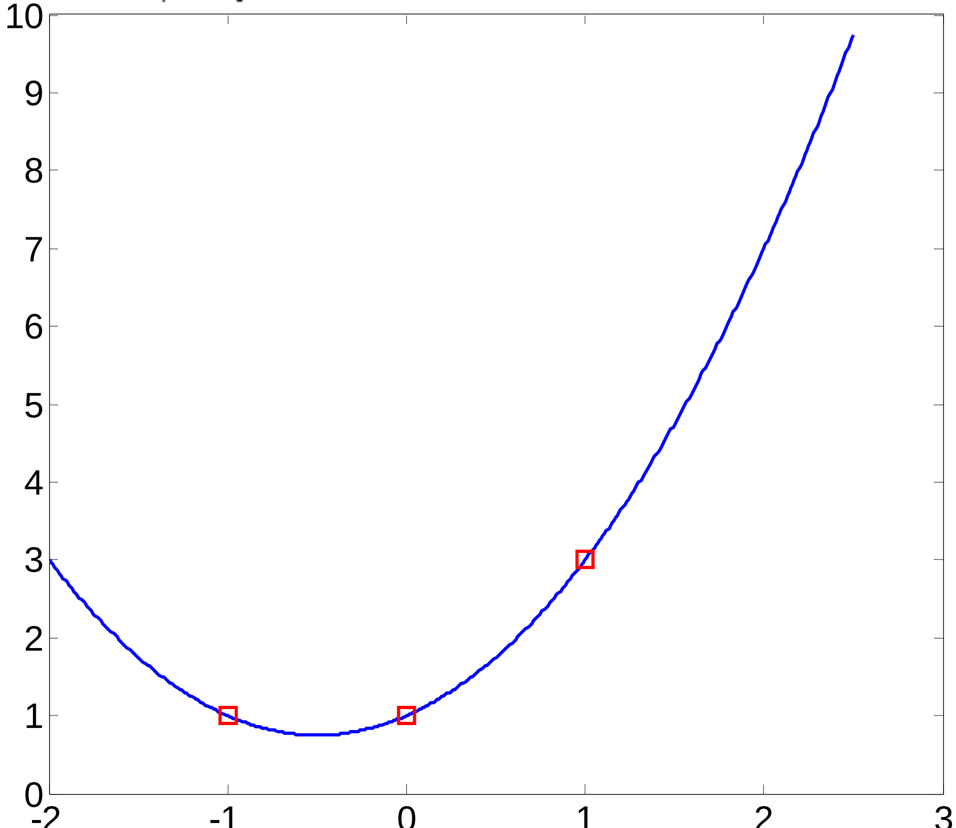
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$$

$$= 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x)$$

$$= \frac{x^2 - x}{2} - (x^2 - 1) + \frac{3}{2}(x^2 + x)$$

$$P(x) = x^2 + x + 1$$



x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

$$P(x) = x^{۲} + x + ۱$$

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

$P(۰٫۵)$ را به عنوان تقریب $f(۰٫۵)$ محاسبه می‌کنیم، یعنی

$$f(۰٫۵) \simeq P(۰٫۵)$$

$$= ۰٫۲۵ + ۰٫۵ + ۱ = ۱٫۷۵$$

تمرین: چند جمله ای درون یاب مربوط به تابع جدولی زیر را محاسبه کنید؟

x	-2	0	1	2
f	1.8	0.7	1.2	1

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۳: درون یابی

بخش 2: روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن، تفاضل پیشرو

تعریف : تفاضلات تقسیم شده

تفاضل تقسیم شده **مرتبه اول** نیوتن بین x_0 و x_1:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

تفاضل تقسیم شده **مرتبه اول** نیوتن بین x_1 و x_2:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
...	...
x_n	f_n

تعریف : تفاضلات تقسیم شده

x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
...	...
x_n	f_n

تفاضل تقسیم شده **مرتبه دوم** نیوتن بین x_0، x_1 و x_2 :

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

تفاضل تقسیم شده **مرتبه دوم** نیوتن بین x_1 x_2 و x_3:

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}$$

جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	f_0				
		$f[x_0,x_1]$			
			$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_1	f_1				
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
			$f[x_1,x_2,x_3]$		$\cdots$
x_2	f_2				
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	f_4				

جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	$\overset{a_0}{f_0}$				
		$\overset{a_1}{f[x_0, x_1]}$			
x_1	f_1		$\overset{a_2}{f[x_0, x_1, x_2]}$		
		$f[x_1, x_2]$		$\overset{a_3}{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\cdots$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	f_4				

فرمول چندجمله ای درون یاب:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots$$

مثال: ابتدا جدول تفاضلات نیوتن را برای نقاط زیر بیابید سپس چندجمله ای درون یاب را بدست آورید؟

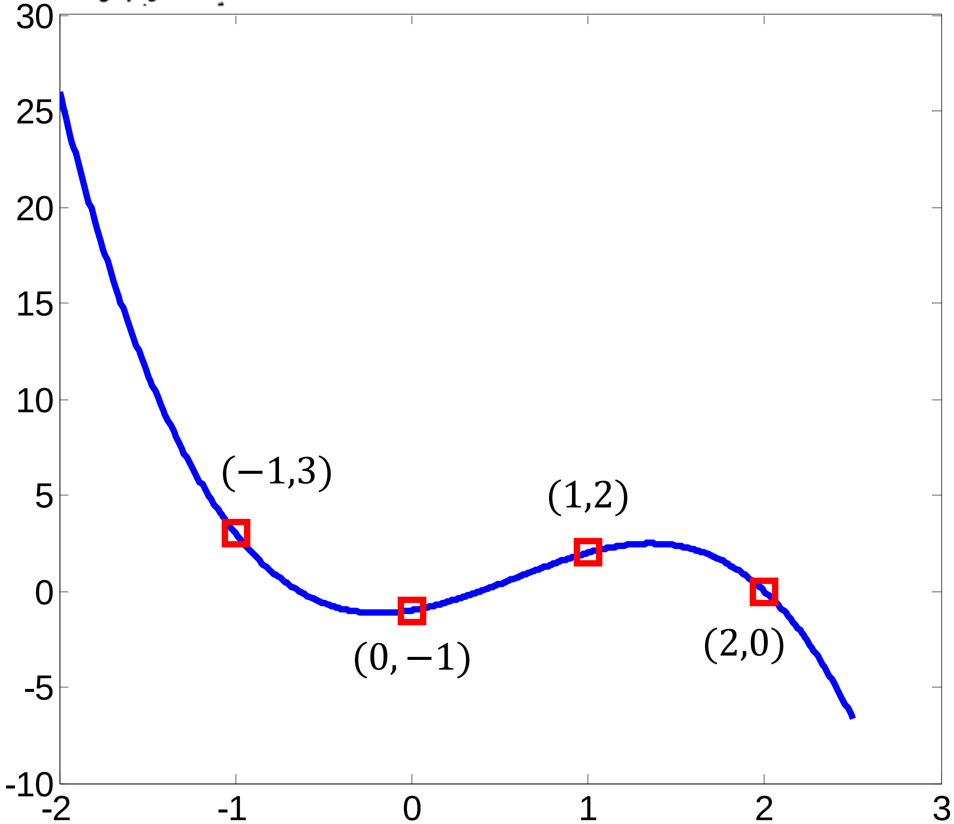
x_i	-1	0	1	2
f_i	3	-1	2	0

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
-1	3			
		$\frac{3-(-1)}{-1-0}=-4$		
0	-1		$\frac{-4-3}{-1-1}=\frac{7}{2}$	
		3		-2
1	2		$-\frac{5}{2}$	
		-2		
2	0			

$$P_3(x) = 3 - 4(x+1) + \frac{7}{2}(x+1)x - 2(x+1)x(x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$P_3(x) = -2x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$



x_i	-1	0	1	2
f_i	3	-1	2	0

$$P_3(x) = -2x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

مثال: با داشتن تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ و نقاط $x_0 = 0$، $x_1 = 1$، $x_2 = 8$ و $x_3 = 27$ مطلوب است:

الف) چند جمله ای درونیاب

ب) یافتن مقدار تقریبی $\sqrt[3]{25}$ به کمک چندجمله ای درونیاب

ج) تخمین خطای تقریبی $\sqrt[3]{25}$

x_i	0	1	8	27
f_i	0	1	2	3

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0			
		$\frac{0-1}{0-1} = 1$		
1	1		-0.1071	
		$1/7$		0.0038
8	2		-0.0035	
		$1/19$		
27	3			

$$p_3(x) = 0 + x - 0.1071x(x-1) + 0.0038x(x-1)(x-8)$$

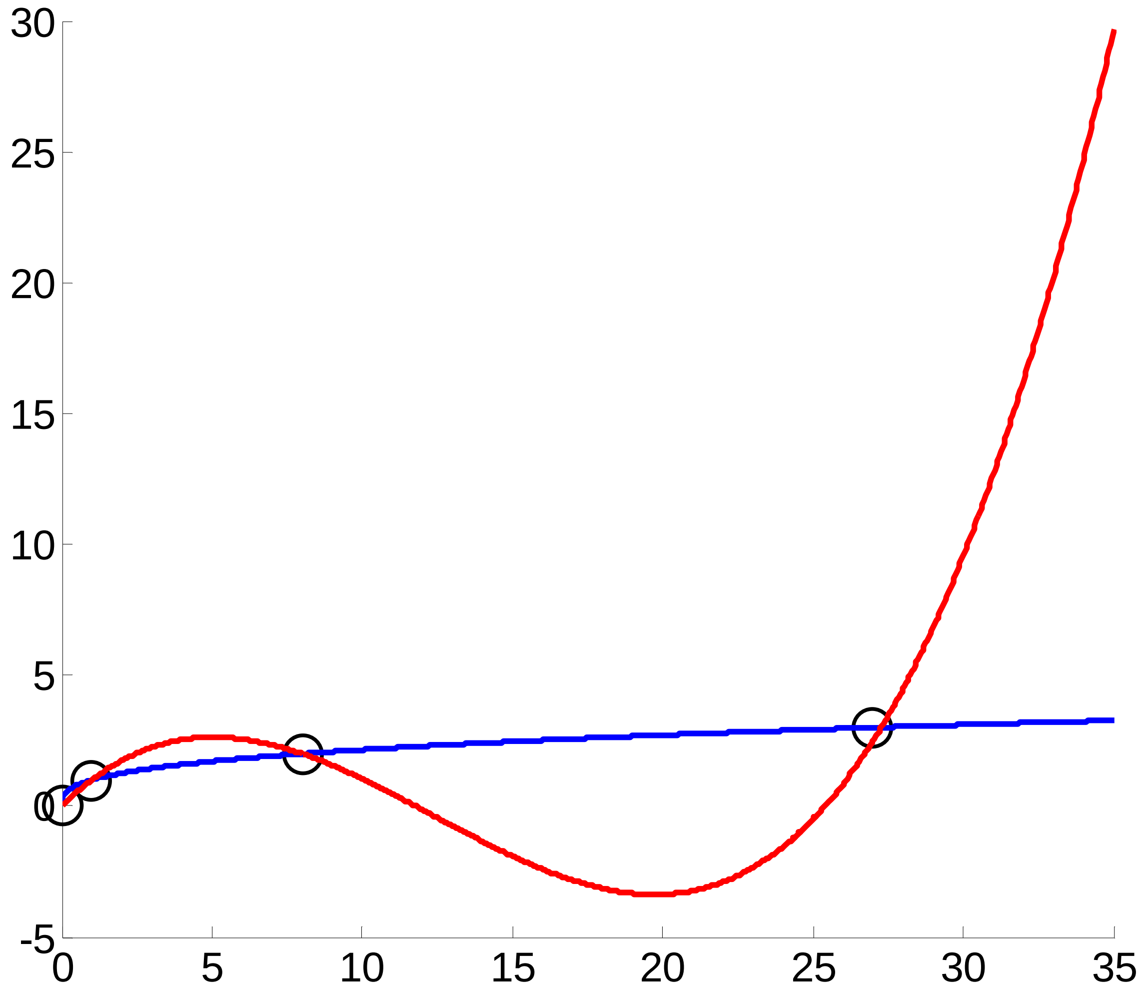
$$p_3(25) = 0 + 25 - 0.1071 \times 25 \times (25-1) + 0.0038 \times 25(25-1)(25-8)$$

$$p_3(25) = -0.5$$

$$error = \left|\sqrt[3]{25} - (-0.5)\right| \approx 3.424$$

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه آیت ا... العظمی بروجردی (ره)



روش تفاضلات متناهی

روش لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط x_0، x_1، x_1 و .... که متساوی الفاصله باشند یا نباشند به کار می رود.

ممکن است گاهی اوقات x_i متساوی الفاصله با طول گام h باشند

تعریف : عملگر تفاضل پیش رو

Δ عملگر تفاضل پیشرو می باشد.

x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
...	...
x_n	f_n

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} \text{-} \Delta f_i$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} \text{-} \Delta^2 f_i$$

...

مثال: جدول تفاضل پیش رو را برای نقاط زیر بیابید؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	5	-2	0	1

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	5			
		$-2-5=-7$		
0	-2		$2-(-7)=9$	
		$0+2=2$		-10
1	0		-1	
		1		
2	1			

نحوه یافتن چندجمله ای درون یاب:

$$P_k(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta - 1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \cdots$$

$$x = x_0 + h\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$P(x)$$

مثال: ابتدا جدول تفاضل پیش رو برای نقاط زیر بیابید سپس چندجمله ای درون یاب را بدست آورید؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	1	2	5

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	2			
		$1-2=-1$		
0	1		$1-(-1)=2$	
		1		0
1	2		2	
		3		
2	5			

$$P_3(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$P_3(x) = 2 - \theta + \theta(\theta - 1)$$

$\theta = x + 1$

$$P_3(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) = x^2 + 1$$

تمرین1 : با داشتن تابع $f(x) = axe^{-bx} + c$ و نقاط $x_0 = 0$، $x_1 = 0.5$، $x_2 = 1$ و $x_3 = 1.5$ مطلوب است:

الف) چند جمله ای درونیاب (تقسیم شده نیوتن)

ب) یافتن مقدار تقریبی f(0.8) به کمک چندجمله ای درونیاب

ج) تخمین خطای تقریبی f(0.8)

x_i	0	0.5	1	1.5
f_i				

توجه: مقدار ضرایب a، b و c به صورت رندوم در بازه [-2,2] انتخاب کنید.

ترکیب ۳ انتخاب هیچ دو نفری نباید مشابه باشد!!!

تمرین۲ : با داشتن تابع $f(x) = ax - bsin(x) + c$ و نقاط $x_0 = 0$، $x_1 = 0.5$، $x_2 = 1$ و $x_3 = 1.5$ مطلوب است:

الف) چند جمله ای درونیاب (پیشرو)

ب) یافتن مقدار تقریبی f(1.2) به کمک چندجمله ای درونیاب

ج) تخمین خطای تقریبی f(1.2)

x_i	0	0.5	1	1.5
f_i				

توجه: مقدار ضرایب a، b و c به صورت رندوم در بازه [-2,2] انتخاب کنید.

ترکیب ۳ انتخاب هیچ دو نفری نباید مشابه باشد!!!

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۳: درون یابی

بخش ۳: روش تفاضل پسرو

تعریف : عملگر تفاضل پسرو

∇ عملگر تفاضل پسرو می باشد.

x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
...	...
x_n	f_n

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1}$$

...

مثال: جدول تفاضل پسرو را برای نقاط زیر بیابید؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	5	-2	0	1

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
-1	5			
		$-2-5=-7$		
0	-2		$2-(-7)=9$	
		$0+2=2$		-10
1	0		-1	
		$1-0=1$		
2	1			

نحوه یافتن چندجمله ای درون یاب:

$$P_k(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \cdots$$

$$x = x_n + h\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{x - x_n}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$P(x)$$

مثال: ابتدا جدول تفاضل پسرو برای نقاط زیر بیابید سپس چندجمله ای درون یاب را بدست آورید؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	1	2	5

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
-1	2			
		$1-2=-1$		
0	1		$1-(-1)=2$	
		1		0
1	2		2	
		3		
2	5			

$$P_3(x) = f_0 + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla^3 f_n$$

$$P_3(x) = 5 + 3\theta + \theta(\theta+1)$$

$\theta = x - 2$

$$P_3(x) = 5 + 3(x-2) + (x-2)(x-1) = x^2 + 1$$