وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه آیت ا... العظمی بروجردی (ره)

به نام خدا

محاسبات عددی

جلسه اول

مقدمه

حضور در کلاس

تمرین ها ۳۰-۵۰٪

میان ترم

پایان ترم

درسنامه، اطلاعیه ها و اخبار	**کانال واتساپ** https://chat.whatsapp.com/lhiXkwdn7psHrHFldaHSsB
ارسال پاسخ تمرین و امتحان	**ایمیل** ajoodaki.abru@gmail.com

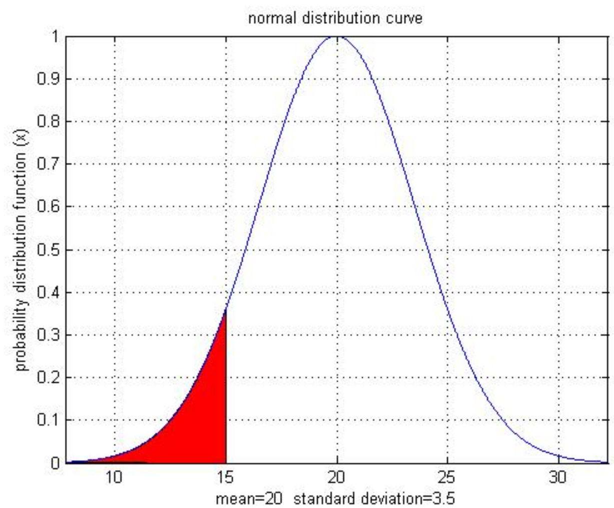
منابع

- کتاب محاسبات عددی دکتر نیکوکار
- کتاب محاسبات عددی دکتر شیدفر
- کتاب محاسبات عددی دکتر زرینی

چرا درس محاسبات عددی:

- To solve problems that cannot be solved exactly

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$



Steps in Solving an Engineering Problem

چطور یک مسئله مهندسی حل می شود:

Problem Description

↓

Mathematical Model

↓

Solution of Mathematical Model

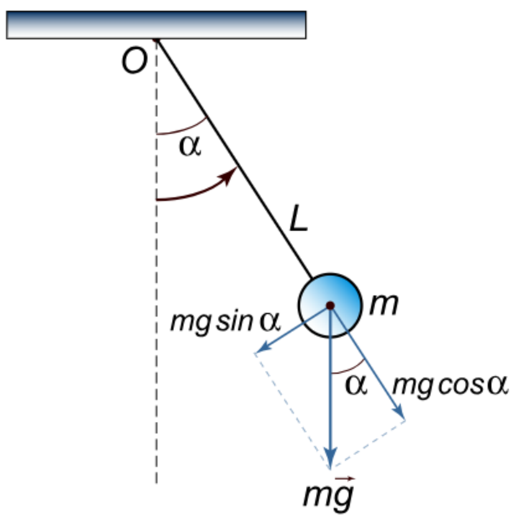
↓

Using the Solution

منابع خطا

- خطایی که قبل از شروع محاسبات در مدل ریاضی یا فرمول بندی کردن مساله رخ می دهد.

$$M = I\ddot{\alpha}$$



$$M = -mgL\sin\alpha$$

$$I = mL^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$$

تقریبِ $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

سایر منابع خطا

- خطای داده
- خطای نمایش اعداد
- خطاهای محاسباتی
- خطای روش

Example of Truncation Error

Taking only a few terms of a Maclaurin series to approximate e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

If only 3 terms are used,

$$Truncation\ \ Error = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$$

Round off Error

- Caused by representing a number approximately

$$\frac{1}{3} \cong 0.333333$$

$$\sqrt{2} \cong 1.4142...$$

Example 1:

Find the bounds for the propagation in adding two numbers. For example if one is calculating $X + Y$ where

$$X = 1.5 \pm 0.05$$
$$Y = 3.4 \pm 0.04$$

Solution

Maximum possible value of $X = 1.55$ and $Y = 3.44$

Maximum possible value of $X + Y = 1.55 + 3.44 = 4.99$

Minimum possible value of $X = 1.45$ and $Y = 3.36$.

Minimum possible value of $X + Y = 1.45 + 3.36 = 4.81$

Hence

$$4.81 \le X + Y \le 4.99.$$

Propagation of Errors In Formulas

If f is a function of several variables $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots., X_{n-1}, X_n$ then the maximum possible value of the error in f is

$$\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\Delta X_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\Delta X_2\right| + \ldots\ldots. + \left|\frac{\partial f}{\partial X_{n-1}}\Delta X_{n-1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial X_n}\Delta X_n\right|$$

Example 2:

The strain in an axial member of a square cross-section is given by

$$\in = \frac{F}{h^2 E}$$

Given

$$F = 72 \pm 0.9 \text{ N}$$
$$h = 4 \pm 0.1 \text{ mm}$$
$$E = 70 \pm 1.5 \text{ GPa}$$

Find the maximum possible error in the measured strain.

Example 2:

Solution

$$\in = \frac{72}{(4\times 10^{-3})^2(70\times 10^{9})}$$

$$= 64.286\times 10^{-6}$$

$$= 64.286\mu$$

$$\Delta \in = \left|\frac{\partial \in}{\partial F}\Delta F\right| + \left|\frac{\partial \in}{\partial h}\Delta h\right| + \left|\frac{\partial \in}{\partial E}\Delta E\right|$$

Example 2:

$$\frac{\partial \in}{\partial F} = \frac{1}{h^2 E} \qquad \frac{\partial \in}{\partial h} = -\frac{2F}{h^3 E} \qquad \frac{\partial \in}{\partial E} = -\frac{F}{h^2 E^2}$$

Thus

$$\Delta E = \left|\frac{1}{h^2 E}\Delta F\right| + \left|\frac{2F}{h^3 E}\Delta h\right| + \left|\frac{F}{h^2 E^2}\Delta E\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(4\times10^{-3})^2(70\times10^9)}\times 0.9\right| + \left|\frac{2\times72}{(4\times10^{-3})^3(70\times10^9)}\times 0.0001\right|$$

$$+ \left|\frac{72}{(4\times10^{-3})^2(70\times10^9)^2}\times 1.5\times10^9\right|$$

$$= 5.3955\mu$$

Hence

$$\in = (64.286\mu \pm 5.3955\mu)$$

Example 3:

Subtraction of numbers that are nearly equal can create unwanted inaccuracies. Using the formula for error propagation, show that this is true.

Solution

Let

$$z = x - y$$

Then

$$\begin{aligned} |\Delta z| &= \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \\ &= |(1)\Delta x| + |(-1)\Delta y| \\ &= |\Delta x| + |\Delta y| \end{aligned}$$

So the relative change is

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x - y|}$$

Example 3:

For example if

$$x = 2 \pm 0.001$$
$$y = 2.003 \pm 0.001$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|0.001| + |0.001|}{|\,2 - 2.003\,|}$$

$$= 0.6667$$
$$= 66.67\%$$

تعریف خطا

خطای مطلق:

اگر a تقریبی از A باشد:

$$e(a) = |A - a|$$

خطای نسبی:

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|}$$

$$A = 3.756293$$

$$a = 3.7563$$

$$e(a) = |3.756293 - 3.7563|$$

$$e(a) = 0.000007 = 7 \times 10^{-6}$$

$$\delta(a) = \frac{0.000007}{3.756293} = 1.86 \times 10^{-6}$$

مثال دوم: محاسبه مشتق

$$f(x) = 7e^{0.5x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$x = 2$

$\Delta x = 0.3$

Solution:

$$\begin{aligned}
f'(2) &\approx \frac{f(2+0.3) - f(2)}{0.3} \\
&= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3} \\
&= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3} \\
&= \frac{22.107 - 19.028}{0.3} = 10.263
\end{aligned}$$

مشتق تقریبی:

$$f(x) = 7e^{0.5x}$$

$$f'(x) = 7 \times 0.5 \times e^{0.5x}$$

$$= 3.5e^{0.5x}$$

مشتق دقیق:

$$f'(2) = 3.5e^{0.5(2)}$$

$$= 9.5140$$

$$e(a) = 9.5140 - 10.263 = -0.722$$

$$\delta(a) = 7.5888\ \%$$

اگر مقدار واقعی عدد یا کمیت مورد نظر یا A معلوم نباشد؟

در روش های عددی معمولا فرایند رسیدن به پاسخ **تکراری** است،
مقدار خطا در هر مرحله (تکرار):

مقدار کمیت در تکرار حاضر	a
مقدار کمیت در تکرار قبل	A

THE END

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۲: محاسبه ریشه توابع

بخش ۱: روش دو بخشی (تنصیف)

مقدمه:

یکی از مسائلی که در علوم مهندسی زیاد با اون مواجه می شویم حل معادله:

$$f(x)=0$$

است.   به عبارتی دیگه **ریشه** های تابع f(x) را محاسبه کنیم.

توابع سخت تر:

$$f(x) = x^2 - Ln(x) + 2$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = x^4 - 3x + 3$$

تابع ساده:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

انواع روش های عددی

۱- روش دوبخشی (تنصیف)

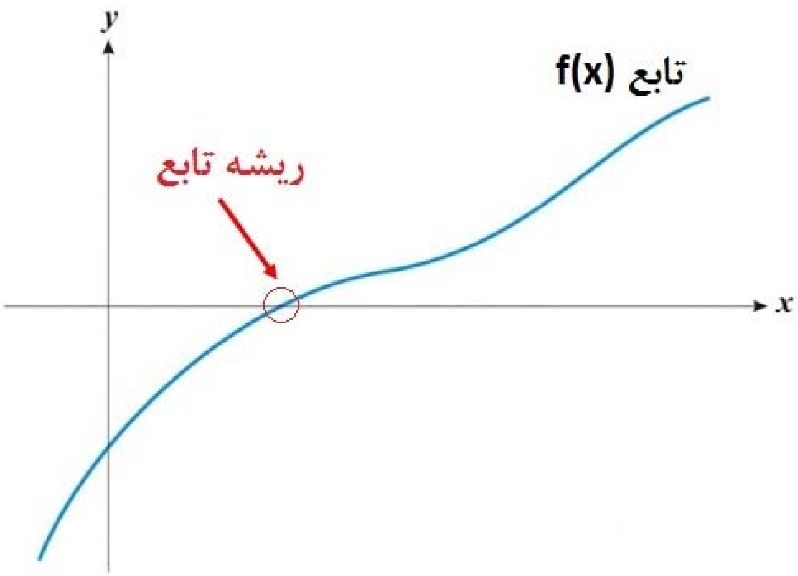
۲- روش نابجایی

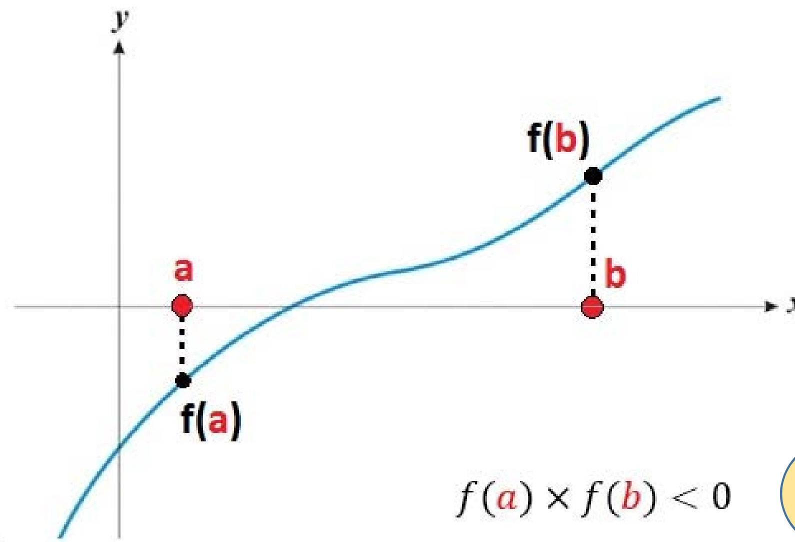
۳- روش نقطه ثابت

۴- روش نیوتن-رافسون

۵- روش وتری

روش دو بخشی (تنصیف)





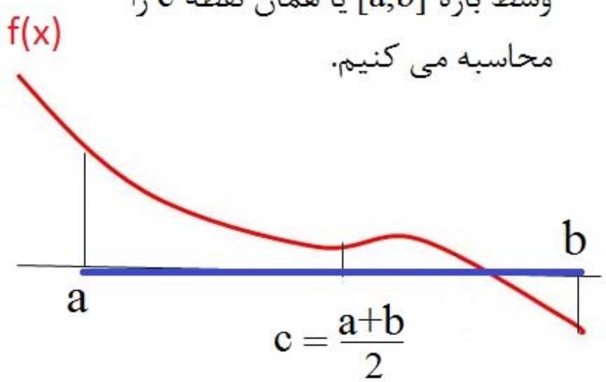
۱ $f(a) \times f(b) < 0$

۲ **توجه: تابع f(x) در بازه (a,b) باید پیوسته باشد.**

توضیح روش دو بخشی (تنصیف)

مرحله اول:

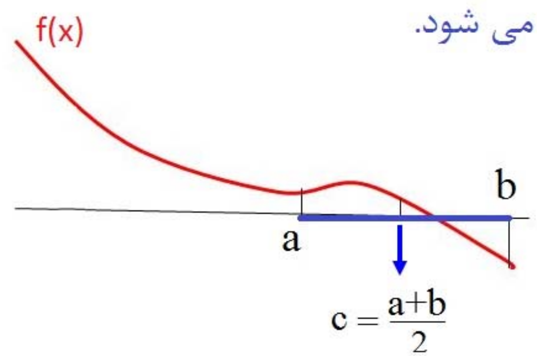
وسط بازه [a,b] یا همان نقطه c را محاسبه می کنیم.



بین بازه [a,c] یا [c,b] کدام انتخاب می گردد؟

مرحله دوم:

چون f(c) با f(b) مختلف علامت بودند، بازه [c,b] به عنوان بازه جدید مرحله دوم انتخاب می شود.



مراحل بعد به همین روال تکرار می شود تا این بازه کوچک و کوچکتر شود.

مثال ۱:

تقریبی از ریشه معادله $x^2 + x - 1$ را که در فاصله و بازه (۱و۰) قرار دارد را به روش تنصیف بیابید؟ تعداد تکرار ۴

پاسخ:

ابتدا یک جدول مطابق زیر تشکیل می دهیم:

تکرار	a	b	F(a)	F(b)	$c = \frac{a+b}{2}$	F(c)
1	0	1	-1	1	0.5	-0.375
2	0.5		-0.375	1	0.75	0.1719
3	0.5	0.75	-0.375	0.1719	0.625	-0.1308

$$0^2 + 0 - 1 = -1$$

$$1^2 + 1 - 1 = 1$$

$$c = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$0.5^2 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$f(a) \times f(b) < 0$$

ادامه حل مثال:

تکرار	a	b	F(a)	F(b)	$c = \frac{a+b}{2}$	F(c)
4	0.625	0.75	-0.1308	0.1719	0.6875	0.0124
5	0.625	0.6875	-0.1308	0.0124	0.6562	-0.0611
6	0.6562	0.6875	-0.0611	0.0124	0.6719	-0.0248

پس، بعد از ۶ تکرار، مقدار c یا همان ۰.۶۷۱۹ ، تقریبی از ریشه تابع در بازه مذکور است.

مثال ۲:

تقریبی از ریشه معادله $x^2-(1-x)^5=0$ را که در فاصله و بازه (۱و۰) قرار دارد را به روش تنصیف بیابید؟ تعداد تکرار تا زمانی که $f(c)<10^{-2}$

پاسخ:

اولا باید تابع در بازه مذکور پیوسته باشد و دوما شرط $f(a)\times f(b)<0$ نیز برقرار باشد:

$$f(a)=f(0)=-1 \,,\; f(b)=f(1)=+1 \Rightarrow f(a).f(b)<0$$

ادامه حل مثال:

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a).f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	$x_۱=\frac{۰+۱}{۲}=$ ۰/۵	$(-)(+)=-$	$f(x_۱=$ ۰/۵$)=$ ۰/۲۱۸۷۵ $\to [a, x_۱]$ ، $x_۱=b$
۲	۰	$x_۱=$ ۰/۵	$x_۲=\frac{۰+۰/۵}{۲}=$ ۰/۲۵	$(-)(-)=+$	$f(x_۲)=-$ ۰/۱۷۱۴۸ $\to [x_۲, b]$ ، $x_۲=a$
۳	$x_۲=$ ۰/۲۵	۰/۵	$x_۳=$ ۰/۳۷۵	$(-)(+)=-$	$f(x_۳)=$ ۰/۰۴۵۲۶ $\to [a, x_۳]$ ، $x_۳=b$
۴	۰/۲۵	$x_۳=$ ۰/۳۷۵	$x_۴=$ ۰/۳۱۲۵	$(-)(-)=+$	$f(x_۴)=$ ۰/۰۵۵۹۳ $\to [x_۴, b]$ ، $x_۴=a$
۵	$x_۴=$ ۰/۳۱۲۵	۰/۳۷۵	$x_۵=$ ۰/۳۴۳۷۵		$f(x_۵)=-$ ۰/۰۰۳۵۵

تمرین

ریشه تقریبی توابع زیر را در بازه های داده شده تا ۶ تکرار محاسبه نمایید؟
(روش تنصیف)

$$e^{-0.5x} - \sin(x) = 0 \qquad (0,4)$$

$$-2t^3 + 3t^2 + 5t + 5 = 0 \qquad (1,5)$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۲: محاسبه ریشه توابع

بخش ۲: روش نقطه ثابت (g(x))

مقدمه:

اساس روش **نقطه ثابت**، این است که معادله f(x)=0 به شکل معادله g(x)=x نوشته شود.

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad g(x)=x$$

مثال:

$$f(x) = x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 2 - x^2 \qquad \text{g(x) تابع}$$

$$x = \sqrt{2 - x} \qquad \text{g(x) تابع}$$

$$x = \frac{2}{1 + x} \qquad \text{g(x) تابع}$$

شرح روش:

x_0 حدس اولیه است

تکرار	x_i	$g(x_i)$
۱	x_0	$g(x_0) \rightarrow x_1$
۲		$g(x_1) \rightarrow x_2$
۳		$g(x_2) \rightarrow x_3$
۴		$g(x_3)$
	...	...

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

شرط همگرایی:

شرط اینکه x_n در روش نقطه ثابت، بالاخره به ریشه تابع **همگرا** شود، دو مورد است:

۱ برای $x \in [a,b]$ داشته باشیم : $g(x) \in [a, b]$

۲ برای $x \in [a,b]$ داشته باشیم : $|\acute{g}(x)| < 1$

پس بعد از تشکیل معادله x=g(x) ، ابتدا دو شرط بالا را بررسی می کنیم، وقتی دو شرط برقرار بود، مقدار اولیه و انتخابی x_0 را حدس و تکرارها را شروع می کنیم.

مثال ۱:

تقریبی از ریشه معادله $f(x)=x-\cos(x)$ را که در فاصله و بازه (۱و۰) قرار دارد را به روش نقطه ثابت بیابید؟ مقدار تخمین اولیه را $x_0=1$ فرض کنید.

پاسخ:

$$x-\cos(x)=0 \longrightarrow x=\boxed{\cos(x)} \qquad g(x)=\cos(x)$$

میتوان چک کرد که آیا تابع $g(x)$ شروط همگرایی را دارد یا خیر؟

۱

$$0<x<1$$

$$\cos(1)<\cos(x)<\cos(0)$$

$$0.5403<g(x)<1$$

۲

$$\acute{g}(x)=-\sin(x)$$

$$x\in[a,b]\rightarrow|-\sin(x)|\le 1 \rightarrow \acute{g}(x)\le 1$$

ادامه حل مثال:

تکرار	x_n	$g(x_n)$
۱	1	$\cos(1) = 0.5403$
۲	0.5403	$\cos(0.5403) = 0.8576$
۳	0.8576	$\cos(0.8576) = 0.6543$
۴	0.6543	$\cos(0.6543) = 0.7935$
۵	0.7935	$\cos(0.7935) = 0.7014$
۶	0.7014	$\cos(0.7014) = 0.7639$
۷	0.7639	$\cos(0.7639) = 0.7221$
۸	$\boxed{0.7221}$	$\cos(0.7221) = 0.7504$

$$f(0.7221) = 0.0283$$

مثال ۲:

تقریبی از ریشه معادله $2x - \sin(x) - 1 = 0$ را که در فاصله و بازه (۱و۰) قرار دارد را به روش نقطه ثابت بیابید؟ تعداد تکرار تا زمانی که $|f(x_n)| < 10^{-3}$

$$g(x) = \frac{\sin(x) + 1}{2}$$

$n=0 \rightarrow x_1 = \frac{\sin(x_0)+1}{2} = 0.9207$

$n=1 \rightarrow x_2 = \frac{\sin(x_1)+1}{2} = 0.898$

$n=2 \rightarrow x_3 = \frac{\sin(x_2)+1}{2} = 0.891$

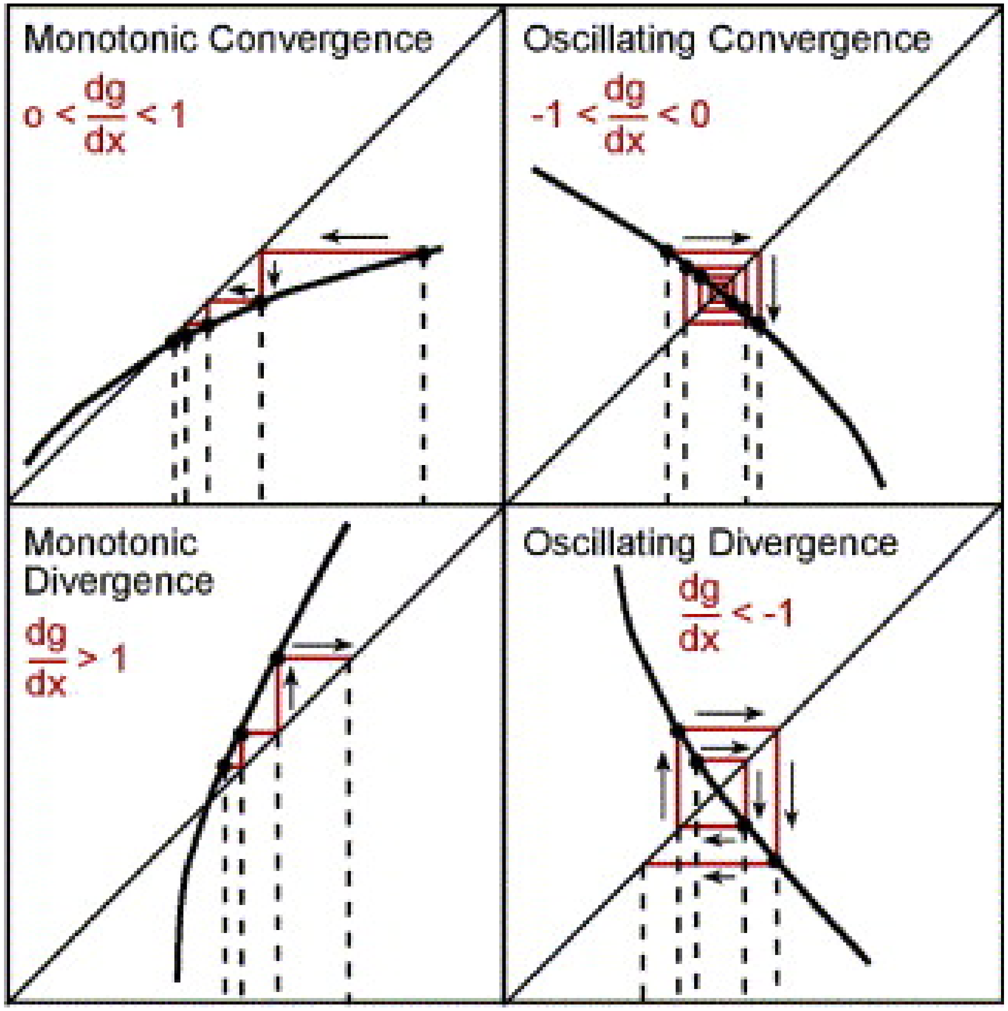
$n=3 \rightarrow x_4 = \frac{\sin(x_3)+1}{2} = 0.8889$

$n=4 \rightarrow x_5 = \frac{\sin(x_4)+1}{2} = 0.8882$

تکرار	x_n	$g(x_n)$	$\lvert f(x_n) \rvert$
۱	1	0.9207	0.0452
۲	0.9207	0.898	0.0139
۳	0.898	0.891	0.0043
۴	0.891	0.8889	0.0014
۵	$\boxed{0.8889}$	0.8882	0.0004

$0.0004 < 10^{-3}$

همگرایی روش:


Monotonic Convergence
$0 < \frac{dg}{dx} < 1$
Oscillating Convergence
$-1 < \frac{dg}{dx} < 0$
Monotonic Divergence
$\frac{dg}{dx} > 1$
Oscillating Divergence
$\frac{dg}{dx} < -1$

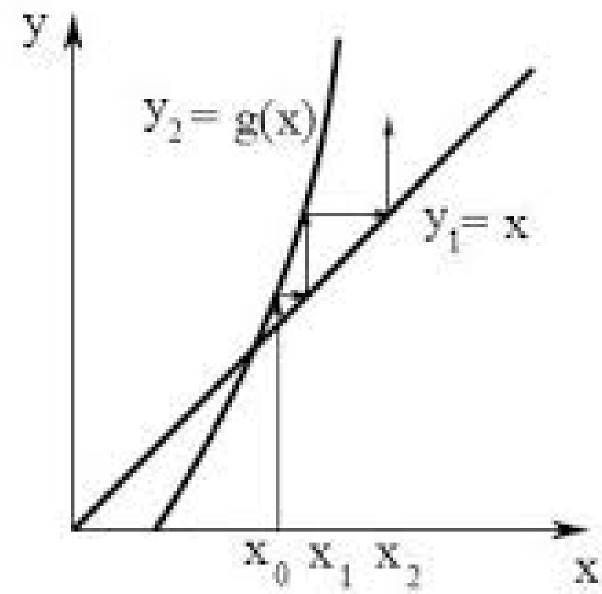


Figure 3. Divergence for $g'(x) > 1$(monotone behavior).

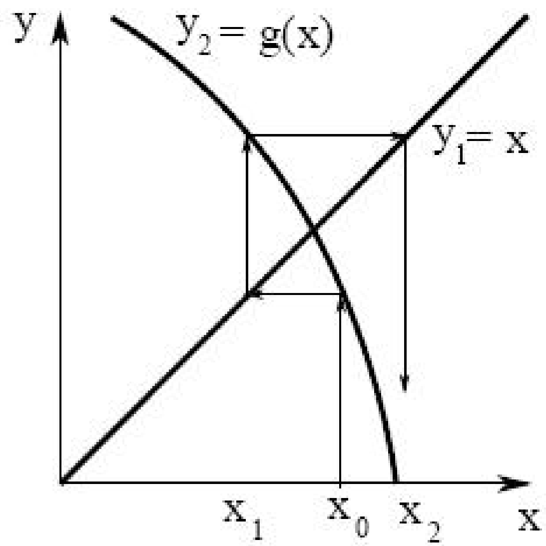


Figure 4. Divergence for $g'(x) < -1$ (oscillatory behavior).

تمرین

ریشه تقریبی توابع زیر را در بازه های داده شده محاسبه نمایید؟ (روش نقطه ثابت)

$$5x - \ln(2x) = 3 \qquad (0,2) \qquad |f(x_n)| < 0.001$$

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad (0,2) \qquad |f(x_n)| < 0.001$$

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۲: محاسبه ریشه توابع

بخش ۳: روش نیوتن-رافسون

شرح روش:

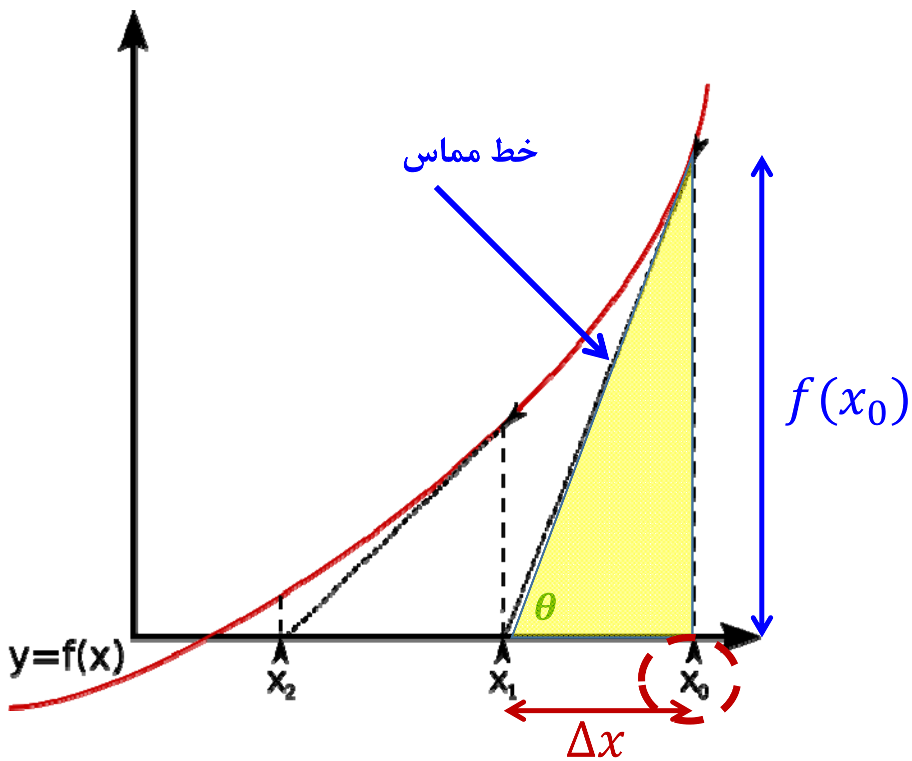
x_0 نقطه شروع (اولیه)

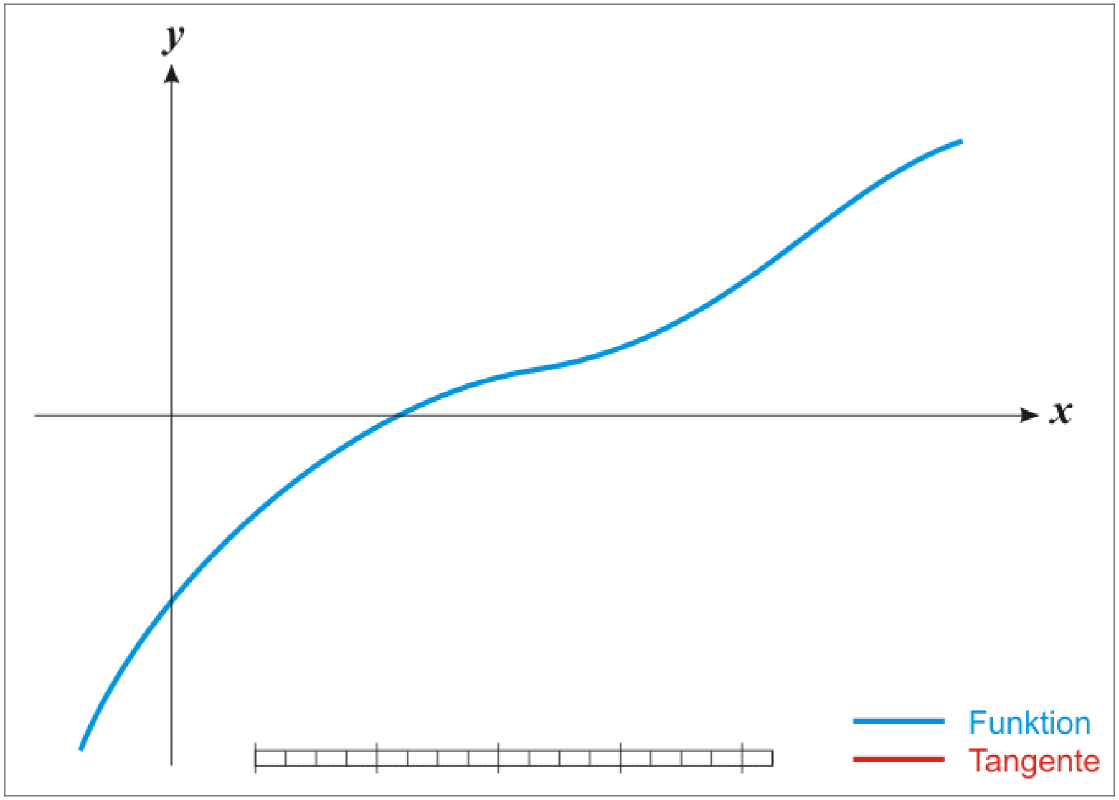
$$f'(x_0) = \tan(\theta) = \frac{f(x_0)}{\Delta x}$$

$$x_1 = x_0 - \Delta x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$




y
x
Funktion
Tangente

مثال: معادله $2^x - x^2 = 0$ را به روش نیوتن حل کنید.

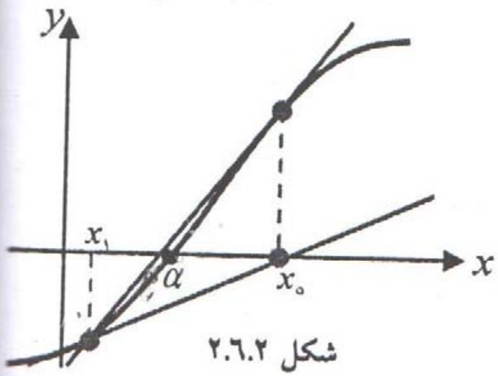
$$f(x) = 2^x - x^2 \quad \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = 2^x Ln2 - 2x$$

n	x_n	$f(x_n)$	$\acute{f}(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\acute{f}(x_n)}$	$\|f(x_n$
1	-0.5	0.4571	1.4905	-0.8066	0.0788
2	-0.8066	-0.0788	2.0094	-0.7673	0.0012
3	-0.7673	-0.0012	1.9418	-0.7667	0.00007

توجه: روش نیوتن دقت بالایی دارد و در صورت همگرا شدن، زود تر به جواب می رسد.

معایب روش نیوتن

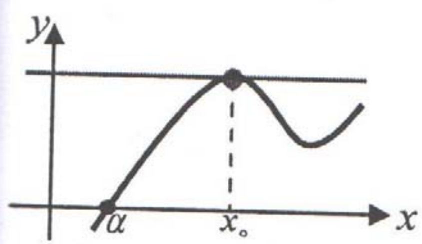
۱. در جاهایی که مشتق تابع تعریف نشده یا صفر باشد نمی‌توان از آن استفاده کرد (برای رفع این مشکل نقطهٔ آغازین x_0 را طوری تغییر می‌دهیم که مشتق تابع در x_n ها صفر نشود)



شکل ۲.٦.۲

۲. ممکن است روش در یک حلقه مانند شکل ۲.۶.۲ قرار گیرد.

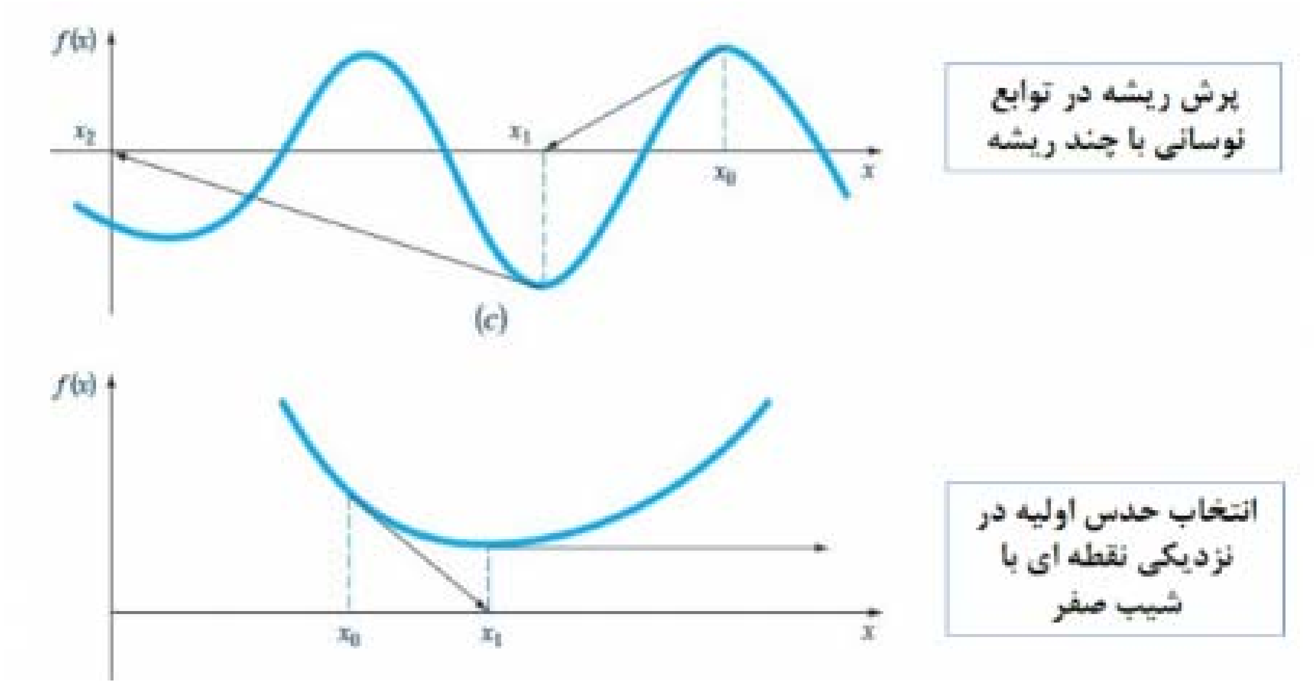
(برای حل این مشکل x_0 را جابجا می‌کنیم).



شکل ۲.٦.۳

۳. ممکن است مماس بر منحنی موازی محور x ها شود (شکل ۲.۶.۳) که برای رفع این مشکل جای نقطهٔ آغازین x_0 را عوض می‌کنیم.

مثال هایی از همگرایی ضعیف در روش نیوتن-رافسون:



مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را به روش نیوتن رافسون حل کنید.

$x = \sqrt{2}$ ⟹ $x^2 - 2 = 0$ ⟹ F(x)=$x^2 - 2$ ⟹ $\acute{f}(x) = 2x$

n	x_n	$f(x_n)$	$\acute{f}(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\acute{f}(x_n)}$	$\|f(x_n$
1	1	-1	2	1.5	0.25
2	1.5	0.25	3	1.4167	0.007
3	1.4167	0.0070	2.8334	1.4142	0.0000

به نام خداوند بخشنده و مهربان

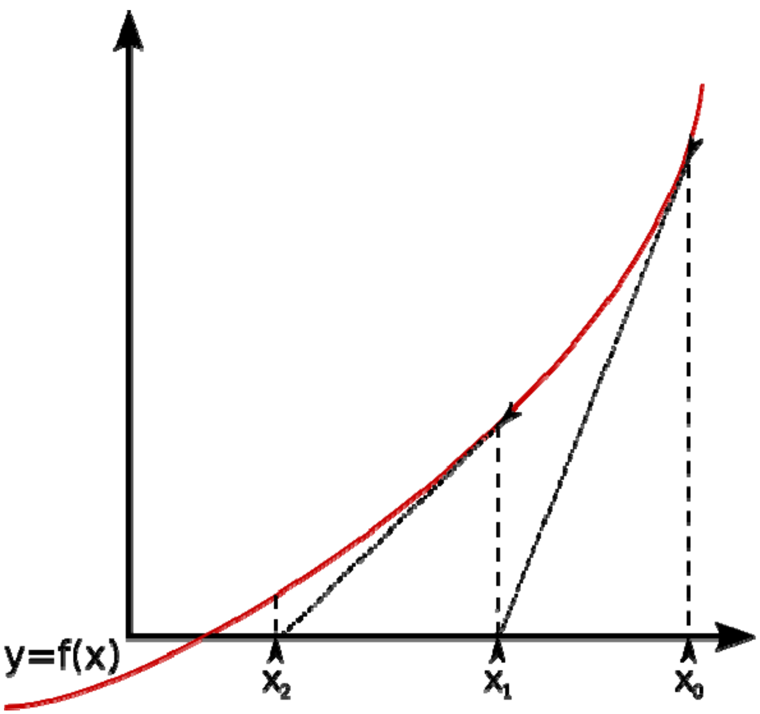
محاسبات عددی

فصل ۲: محاسبه ریشه توابع

بخش ۴: روش وتری

نقاط قوت و ضعف روش نیوتن:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



قوت: همگرایی سریع

ضعف: نیاز به محاسبه مشتق تابع

روش وتری (Secant method)

شرح روش:

معادله خط وتر:

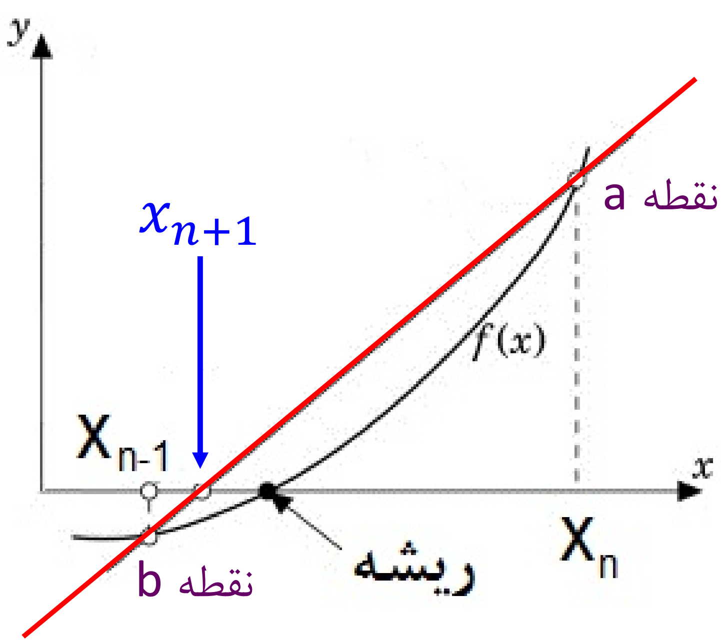
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

نقطه ای که خط وتر محور x را قطع می کند از طریق زیر محاسبه می شود:

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\boxed{x = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}}$$

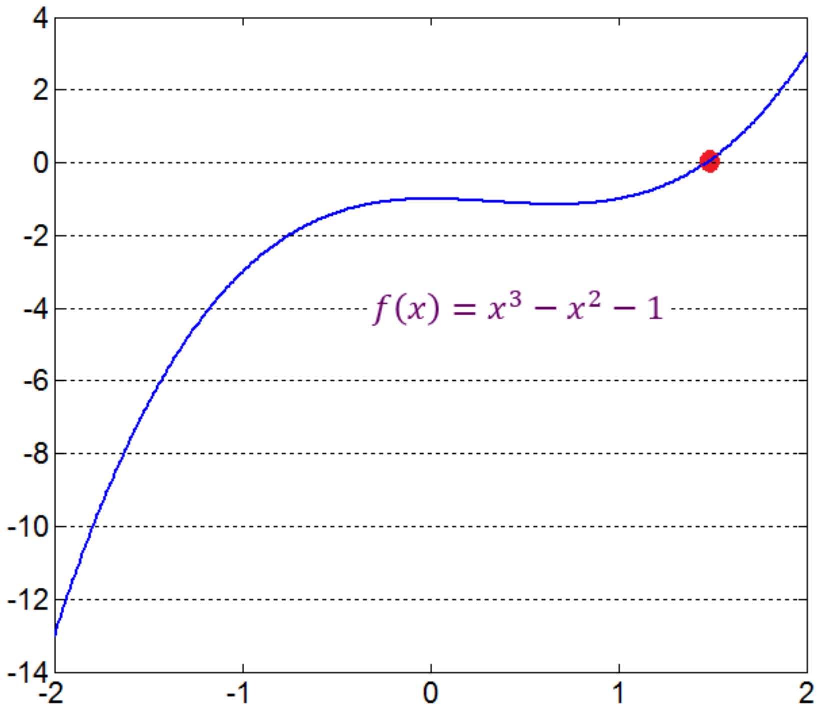


مثال: حل معادله زیر به روش وتری: $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

فرض می کنیم : $x_1 = 2$ $\quad and \quad$ $x_0 = 1$

x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	2	-1	3	1.25	-0.6093
2	1.25	3	-0.6093	1.3766	-0.2863
1.25	1.3766	-0.6093	-0.2863	1.4888	-0.0834

نمودار تابع

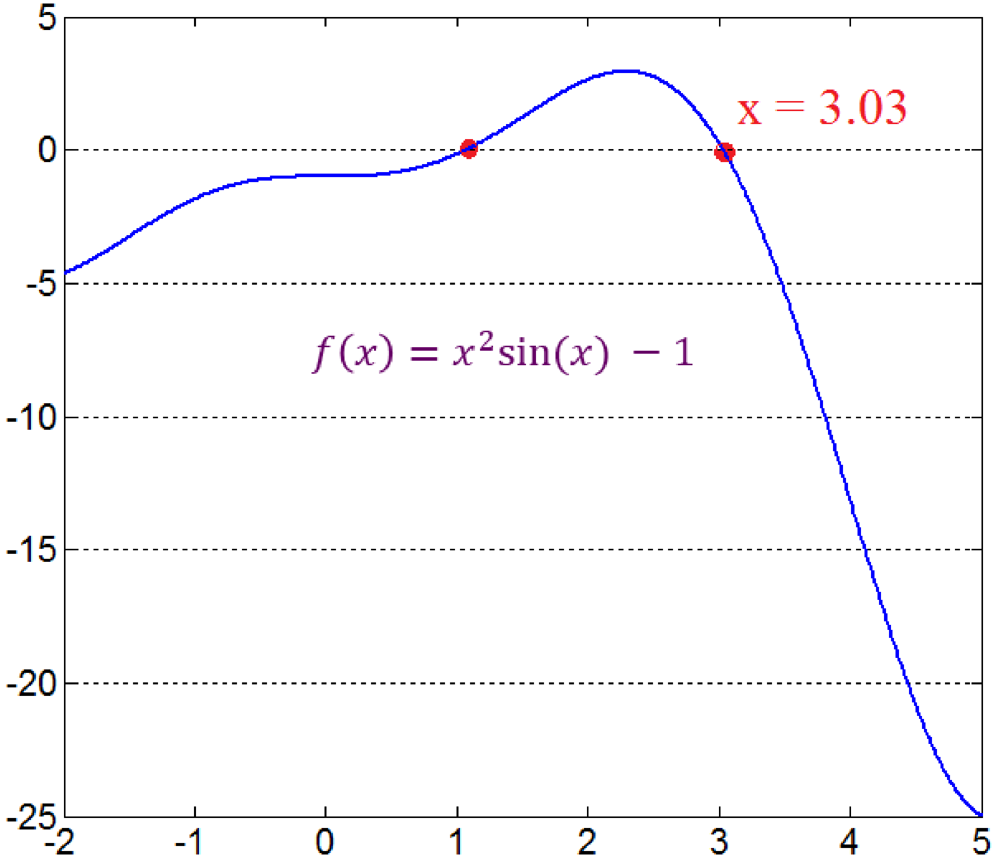


مثال: حل معادله زیر به روش وتری: $f(x) = x^2\sin(x) - 1$

فرض می کنیم: $x_1 = 1.5 \quad and \quad x_0 = 1$

x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	1.5	-0.1585	1.2444	1.0565	-0.0282
1.5	1.0565	1.2444	-0.0282	1.0663	-0.0047
1.0565	1.0663	-0.0282	-0.0047	1.0682	-0.00006

نمودار تابع



تمرین: روش وتری تا ۴ تکرار (محاسبه خطا در هر تکرار)

$$f(x) = (x-2)^2 - Ln(x) \qquad [0.5, 2.5]$$