به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۴: دستگاه معادلات خطی

مقدمه : معرفی دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

روش های عددی حل دستگاه معادلات خطی

الف) روش های مستقیم
- ۱) حذفی گوس
- ۲) حذفی گوس-جردن
- ۳) LU

ب) روش های غیر مستقیم (تکراری)
- ۱) حذفی ژاکوبی
- ۲) حذفی گوس-سایدل

تعریف: ماتریس بالا مثلثی (U)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: ماتریس پایین مثلثی (L)

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه:

اگر یک دستگاه معادلات خطی AX=b بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد و درایه های قطر اصلی آن صفر نباشند، آنگاه دستگاه دارای یک جواب یکتاست.

روش حذفی گوس:

ماتریس افزوده $\{A|b\}$ را بالا یا پایین مثلثی می کند و در نهایت پاسخ معادله به دست می آید.

اعمال سطری مقدماتی:

۱ می توان جای دو سطر از معادلات را با هم عوض کرد

۲ می توان ضرایب یک سطر(معادله) را در یک عدد غیرصفر ضرب کرد.

۳ می توان مضرب ناصفری از یک سطر(معادله) را به سطر(معادله) دیگر اضافه نمود.

مثال : حل دستگاه معادله زیر به روش حذفی گوس

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

مرحله اول:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 2 & -7 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -2R_1 + R_2 \\ \\ 3R_1 + R_3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -17 & -5 & 10 \\ 0 & 19 & 7 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & -2 & -10 & -6 & 10 \\ + & 2 & -7 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & -17 & -5 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 3 & 15 & 9 & -15 \\ + & -3 & 4 & -2 & 1 \\ \hline & 0 & 19 & 7 & -14 \end{array}$$

مرحله دوم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -17 & -5 & 10 \\ 0 & \boxed{19} & 7 & -14 \end{bmatrix} \quad \frac{19}{17}R_2 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -17 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{24}{17} & -\frac{48}{17} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & -19 & -95/17 & 190/17 \\ + & 0 & 19 & 7 & -14 \\ \hline & 0 & 0 & 24/17 & -48/17 \end{array}$$

درنهایت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & -17 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{24}{17} & -\frac{48}{17} \end{bmatrix}$$

$x_1 + 5(0) + 3(-2) = -5 \Rightarrow x_1 = 1$

$-17x_2 - 5(-2) = 10 \Rightarrow x_2 = 0$

$\frac{24}{17}x_3 = -\frac{48}{17} \Rightarrow x_3 = -2$

عملیات مقیاس کردن

تمام ضرایب هر معادله را بر بزرگترین مقدار (از لحاظ قدرمطلق) ضرایب تقسیم کرده تا تمامی ضرایب در آن معادله از لحاظ قدرمطلق کوچکتر یا مساوی یک شوند.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$0.2x_1 + x_2 + 0.6x_3 = -1$$

$$\frac{2}{7}x_1 - x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x_1 + x_2 - \frac{2}{4}x_3 = \frac{1}{4}$$

عملیات محور گیری

انتخاب بزرگترین درایه از لحاظ قدرمطلق برای عناصر قطر اصلی از عناصر زیر قطر اصلی هر ستون را محورگیری گویند.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

نکته:

برای یافتن جواب دستگاه معادلات خطی ابتدا باید اقدام های زیر را **به ترتیب** انجام دهیم:

۱ **مقیاس کردن**

۲ **محورگیری**

مثال: جواب دستگاه معادله زیر را در دوحالت زیر به دست آورید؟
الف) بدون مقیاس کردن و محورگیری
ب) با مقیاس کردن و محور گیری

$$\begin{cases} x + 10^5 y = 10^5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

تمرین: حل یک دستگاه ۴ معادله ۴ مجهول با روش حذفی گوس

$$x_1 - 2x_2 + 2x_2 - 3x_3 = -5.25$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$x_1 = 0.5$$

$$x_2 = -0.75$$

$$x_3 = -1.75$$

$$x_4 = 1.25$$

پاسخ دستگاه افراد متفاوت باشد

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۴: دستگاه معادلات خطی

بخش ۲: روش حذفی گوس-جردن و LU

روش گوس جردن:

همانند روش حذفی گوس عمل می کنیم با این تفاوت که ماتریس ضرایب را به ماتریس قطری تبدیل می کنیم.

تعداد عملیات های آن دوبرابر روش حذفی گوس است.

مثال : حل دستگاه معادله زیر به روش حذفی گوس-جردن

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -9 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

مرحله اول:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & -9 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2R_1 + R_2 \\ \\ -3R_1 + R_3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & -9 \\ 0 & 8 & -11 & -17 \\ 0 & 14 & 20 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & 4 & 10 & -14 & -18 \\ + & -4 & -2 & 3 & 1 \\ \hline & 0 & 8 & -11 & -17 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & -6 & -15 & 21 & 27 \\ + & 6 & 1 & -1 & 5 \\ \hline & 0 & -14 & 20 & 32 \end{array}$$

مرحله دوم:

$$
\begin{bmatrix} 2 & \boxed{5} & -7 & -9 \\ 0 & 8 & -11 & -17 \\ 0 & \boxed{14} & 20 & 32 \end{bmatrix}
\quad
\begin{matrix} -\frac{5}{8}R_2 + R_1 \\ \\ \frac{7}{4}R_2 + R_3 \end{matrix}
\quad
\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{13}{8} \\ 0 & 8 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} \frac{1}{6}R_3 + R_1 \\ \\ \frac{44}{3}R_3 + R_2 \end{matrix}
\quad
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}
$$

درنهایت:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right]$$

$$2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$8x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\frac{3}{4}x_3 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_3 = 3$$

روش تجزیه مثلثی (LU):

منظور از روش LU این است که ماتریس مربعی ضرایب A را به صورت حاصلضرب دو ماتریس پایین مثلثی (L) و بالامثلثی (U) بنویسیم.

مثال : حل دستگاه معادله زیر به روش تجزیه مثلثی یا LU

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -9 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -23 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{-3} \\ 7 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$1 \times u_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2$

$1 \times u_{12} = 5 \Rightarrow u_{12} = 5$

$1 \times u_{13} = -3 \Rightarrow u_{13} = -3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ \boxed{7} & \boxed{-4} & \boxed{1} \\ -1 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{l_{21} \quad 1 \quad 0} \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 2 \qquad l_{21} \times u_{11} = 7 \Rightarrow l_{21} = \frac{7}{2}$$

$$u_{12} = 5 \qquad l_{21} \times u_{12} + u_{22} = -4 \Rightarrow u_{22} = -\frac{43}{2}$$

$$u_{13} = -3 \qquad l_{21} \times u_{13} + u_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = \frac{23}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 2 \qquad l_{21} = \frac{7}{2} \qquad l_{31} \times u_{11} = -1 \Rightarrow l_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$u_{12} = 5 \qquad u_{22} = -\frac{43}{2} \qquad l_{31} \times u_{12} + l_{32} \times u_{22} = 6 \Rightarrow l_{32} = -\frac{17}{43}$$

$$u_{13} = -3 \qquad u_{23} = \frac{23}{2} \qquad l_{31} \times u_{13} + l_{32} \times u_{23} + u_{33} = -8 \Rightarrow u_{33} = -\frac{213}{43}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-17}{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & \frac{-43}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-213}{43} \end{bmatrix}$$

$$AX = b \;\Rightarrow\; L\,\overset{y}{\boxed{(U\,X)}} = b \;\Rightarrow\; L\,y = b$$

$$\Downarrow$$

$$U\,X = y$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -9 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -23 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-17}{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 13 \\ -23 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = -9$$

$$y_2 = \frac{89}{2}$$

$$y_3 = -\frac{852}{86}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & \dfrac{-43}{2} & \dfrac{23}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-213}{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 89/2 \\ -852/86 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 1$

$\Rightarrow \quad x_2 = -1$

$\Rightarrow \quad x_3 = 2$

تمرین:

یک دستگاه سه معادله و سه مجهول ساخته و با **روش LU** و همچنین **گوس-جردن** حل کنید.

ریشه دستگاه غیر صحیح و برای افراد متفاوت باشد.

به نام خداوند بخشنده و مهربان

محاسبات عددی

فصل ۳: دستگاه معادلات جبری

بخش : روش های تکراری

روش‌های تکرار در حل دستگاه معادلات

- این روش‌ها بر مبنای تکرار هستند.
- محاسبات تا وقتی جواب‌ها به خطای از پیش تعیین شده‌ای همگرا شوند، ادامه می‌یابد.
- این دسته روش‌ها تقریبی هستند.
- برای دستگاه‌های بزرگ استفاده می‌شوند.

روش تکراری ژاکوبی

$$\boxed{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{a_{11}}\big(b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)\big)$$

$$a_{21}x_1 + \boxed{a_{22}x_2} + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{a_{22}}\big(b_2 - (a_{21}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)\big)$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + \boxed{a_{nn}x_n} = b_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{1}{a_{nn}}\big(b_n - (a_{n1}x_2 + a_{n2}x_3 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})\big)$$

پس در ابتدا یک مقدار **اولیه و انتخابی** برای همه x ها در نظر می گیریم (فرض می کنیم)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

❖ هر معادله برای یک x حل می‌شود.

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{2}x_2^{(k-1)} + \dfrac{1}{2} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{3}x_1^{(k-1)} + \dfrac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \dfrac{8}{3} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{1}{2}x_2^{(k-1)} - \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

❖ محاسبات با یک تخمین از مجهولات شروع می‌شود. (یک حدس ساده تخمین صفر برای تمامی مجهولات)

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$$

❖ برای تمامی x ها این معادلات حل می‌شوند و این حل تکرار می‌گردد.

$$\begin{cases} x^{(1)} = [0.5000, 2.6667, -2.5000]^T \\ x^{(2)} = [1.8333, 2.0000, -1.1667]^T \\ \vdots \\ x^{(21)} = [2.0000, 3.0000, -1.0000]^T \end{cases}$$

❖ درصد خطای نسبی تقریبی در انتهای هر مرحله برای تمام x ها محاسبه می‌شود.

❖ برای همه مجهولات خطا باید کمتر از خطای از پیش تعیین شده باشد.

مثال: دستگاه زیر را به روش ژاکوبی با فرض مقدار اولیه صفر برای همه متغیرها حل کنید؟

$$2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -10$$

$$7x_1 - x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$

پاسخ:

ابتدا محورگیری:

$$2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -10$$
$$7x_1 - x_2 + 5x_3 = 20$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$

$$7x_1 - x_2 + 5x_3 = 20$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -10$$

محاسبه هر متغیر:

$$x_1 = \frac{1}{7}(20 + x_2 - 5x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - x_1 - x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{6}(10 + 2x_1 + 3x_2)$$

	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	2.8571	3	1.6667
3	2.0952	1.8690	4.1190
4	0.1820	1.4464	3.2996
5	0.7069	2.1296	4.4505
9	1.0104	2.0540	2.9008
10	1.0786	2.0222	3.0305

$$x_1 = \frac{1}{7}(20 + x_2 - 5x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - x_1 - x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(10 + 2x_1 + 3x_2)$$

- روش ممکن است واگرا شود.
- همگرایی ممکن است کند باشد.

مثال ۱ (واگرایی) :

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8 \Rightarrow a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$64a_1 + 8a_2 + a_3 = 177.2 \Rightarrow a_2 = \frac{177.2 - 64a_1 - a_3}{8}$$

$$144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279.2 \Rightarrow a_3 = \frac{279.2 - 144a_1 - 12a_2}{1}$$

حدس اولیه:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

تکرار	a_1	%Error a_1	a_2	%Error a_2	a_3	%Error a_3
1	3.6720	72.767	–7.8510	125.47	–155.36	103.22
2	12.056	69.543	–54.882	85.695	–798.34	80.540
3	47.182	74.447	–255.51	78.521	–3448.9	76.852
4	193.33	75.595	–1093.4	76.632	–14440	76.116
5	800.53	75.850	–4577.2	76.112	–60072	75.963
6	3322.6	75.906	–19049	75.972	–249580	75.931

جواب صحیح:

$$a_1 = 0.29048 \qquad a_2 = 19.690 \qquad a_3 = 1.0857$$

روش تکراری گوس سایدل

در روش ژاکوبی:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{7}(20 + x_2^{k} - 5x_3^{k})$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{4}(12 - x_1^{k} - x_3^{k})$$
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}(10 + 2x_1^{k} + 3x_2^{k})$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{7}(20 + x_2^{k} - 5x_3^{k})$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{4}(12 - x_1^{k+1} - x_3^{k})$$
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}(10 + 2x_1^{k+1} + 3x_2^{k+1})$$

روش گوس سایدل

مثال: حل مسئله قبل با روش گوس سایدل:

$$x_1 = \frac{1}{7}\left(20 + \overset{old}{x_2} - 5\overset{old}{x_3}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(12 - \overset{new}{x_1} - \overset{old}{x_3}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{6}\left(10 + 2\overset{new}{x_1} + 3\overset{new}{x_2}\right)$$

	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	2.8571	2.2857	3.7619
3	0.4966	1.9354	2.7999
4	1.1337	2.0166	3.0529
5	0.9446	1.9956	2.9860
8	1.0007	2.0001	3.0003
9	1.0000	2.0000	3.0000

$$x_1 = \frac{1}{7}(20 + \overset{old}{x_2} - 5\overset{old}{x_3})$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - \overset{new}{x_1} - \overset{old}{x_3})$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(10 + 2\overset{new}{x_1} + 3\overset{new}{x_2})$$

ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را ماتریس اکیداً قطری غالب[1] گویند، هرگاه به ازای هر داشته باشیم:

$$\boxed{\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|}$$

$$\left|a_{ii}\right| > \left|a_{i1}\right| + \left|a_{i2}\right| + \cdots + \left|a_{i(i-1)}\right| + \left|a_{i(i+1)}\right| + \cdots + \left|a_{in}\right|$$

نشان دهید که ماتریس زیر یک ماتریس اکیداً قطری غالب است:

$$A = \begin{bmatrix} -۵ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۷ & -۳ \\ ۰ & ۵ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$|-۵| > |۱| + |۳|$$

$$|۷| > |۲| + |-۳|$$

$$|-۶| > |۰| + |-۶|$$

وزارت علوم تحقیقات وفناوری

دانشگاه آیت ا... العظمی بروجردی (ره)

قضیه ۳.۳.۱ : هرگاه A یک ماتریس اکیداً قطری غالب باشد، آنگاه روش‌های تکراری گاوس- سایدل به ازای هر مقدار اولیهٔ $X^{(0)}$ به جواب واقعی دستگاه همگرا هستند.

- افزایش سرعت همگرائی با استفاده از ضریب تخفیف (Relaxation)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{R_i^{(k)}}{a_{i,i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$R_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$\omega = 1 \quad \Longrightarrow$ Gauss-Seidel

$\omega < 1 \quad \Longrightarrow$ Under Relaxation

$1 < \omega < 2 \quad \Longrightarrow$ Over Relaxation

$\omega > 2 \quad \Longrightarrow$ System Diverge

- ضریب زیر تخفیف باعث جلوگیری از واگرائی و میرایی نوسانات در تکرار می‌شود.
- ضریب فوق تخفیف باعث بالابردن سرعت همگرایی می‌شود.

تمرین:

یک دستگاه سه معادله و سه مجهول ساخته و با **روش ژاکوبی** و همچنین **گوس-سایدل** حل کنید.
(مقدار مجهولات اختیاری، غیر رند و در بازه [1 ,4-] باشند.

مقدار مجهولات هیچ دو نفری نباید مانند هم باشد، در غیر این صورت نمره صفر خواهد بود.